級数の共通因数を削除する多数桁計算法

後　保範（早稲田大学）

A removal method of common factors for the Multiple-precision computation with series

Yasunori Ushiro (Waseda University)

級数で表される関数値の多数桁計算は DRM (分割有理数化法)で高速計算でき、2002 年に 1.2 兆桁のπ計算(当時の世界記録)を達成した。しかし、このときには、途中計算で発生す通分において、2 項の分母は乗算し、共通因数を削除していない。今回、共通因数が容易に計算できることが判明した。その方法と共通因数の削除効果を発表する。

1. はじめに

無限級数に展開できる関数を多数桁の精度で計算するには、DRM 法（分割有理数化法）が効率的である。この方法の場合、n 桁の乗算の演算量を M(n)とすると、入力値の精度が O(1)桁（計算機の倍精度で表現できる程度）の有理数の場合には、n 桁精度の計算量を $O(M(n)\cdot(\log_2 n)^2)$にできる。このとき、多くの関数では、DRM 法の各ステップで通分する、2 項の分母には、共通因数が存在する。しかし、2002 年に行なった、$\tan^{-1}$ 関数級数を使用した 1.2 兆桁のπ計算（当時の世界記録）では、通分するための共通因数の効率的計算法が分からなかったので共通因数の削除をしていない。しかし、効率的に通分の約数を計算することができれば、計算量のオーダーには影響しないが、高速化が可能になる。さらに、ディスクへの入出量を大幅に削減できる。

2. DRM 法

πの多数桁演算で使用されてきた、$\tan^{-1}(1/x)$ の計算を例に示す。小数点以下 10 進 n 桁求めるには、$x^{2\alpha-1} > 10^n$ となるα項まで計算すればよい。分子、分母が n 桁を超さない適当なところで、除算で小数点以下 n 桁を求める。

$$\tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)=[\frac{1}{x}-\frac{1}{3\cdot x^3}]+[\frac{1}{5\cdot x^5}-\frac{1}{7\cdot x^7}]+[\frac{1}{9\cdot x^9}-\frac{1}{11\cdot x^{11}}]+[\frac{1}{13\cdot x^{13}}-\frac{1}{15\cdot x^{15}}]+\cdots$$

$$1\text{段目：}\left\{\begin{array}{l} =\dfrac{1}{x}\cdot\{\dfrac{3\cdot x^2-1}{3\cdot x^2}+\dfrac{1}{x^4}\cdot\dfrac{7\cdot x^2-5}{35\cdot x^2}+\dfrac{1}{x^8}\cdot\dfrac{11\cdot x^2-9}{99\cdot x^2}+\dfrac{1}{x^{12}}\cdot\dfrac{15\cdot x^2-13}{195\cdot x^2}+\cdots\} \\ =\dfrac{1}{x}\cdot\{[\dfrac{a_1}{b_1}+\dfrac{1}{x^4}\cdot\dfrac{a_3}{b_3}]+\dfrac{1}{x^8}\cdot[\dfrac{a_5}{b_5}+\dfrac{1}{x^4}\cdot\dfrac{a_7}{b_7}]+\cdots\} \end{array}\right.$$

$$
2\text{段目}:\begin{cases} = \dfrac{1}{x}\cdot\{\,[\dfrac{a_1\cdot b_3\cdot x^4 + a_3\cdot b_1}{b_1\cdot b_3\cdot x^4} + \dfrac{1}{x^8}\cdot\dfrac{a_5\cdot b_7\cdot x^4 + a_7\cdot b_5}{b_5\cdot b_7\cdot x^4}] + \cdots\} \\ = \dfrac{1}{x}\cdot\{[\dfrac{c_1}{d_1} + \dfrac{1}{x^8}\cdot\dfrac{c_5}{d_5}] + \cdots\} \end{cases}
$$

$$
3\text{段目}:\quad = \frac{1}{x}\cdot\{\frac{c_1\cdot d_5\cdot x_8 + c_5\cdot d_1}{d_1\cdot d_5\cdot x^8} + \frac{1}{x_{16}}\cdot\frac{\cdots}{\cdots} + \cdots\}
$$

以下、分子、分母が指定した桁数を超えないところまで同様に通分処理を行う。分子、分母が指定桁数に到達すると各分数で除算処理を行い小数点以下必要な桁数まで求め、加算して最終結果を求める。多数桁の乗算と除算はＦＦＴを使用する。

3. 共通因数約分つき DRM 法

DRM 法を用い下記の k 段目の 2 項の通分処理の例で説明する。

$$
\frac{1}{g}\cdot\left(\frac{A}{b} + \frac{C}{X\cdot d}\right) = \frac{1}{g}\cdot\left(\frac{A}{G\cdot B} + \frac{C}{X\cdot G\cdot D}\right) = \frac{1}{g\cdot G}\left(\frac{A}{B} + \frac{C}{X\cdot D}\right)
$$

$$
= \frac{1}{g\cdot G}\cdot\frac{X\cdot A\cdot D + B\cdot C}{X\cdot B\cdot D} = \frac{1}{H}\cdot\frac{E}{F} \qquad --- 1
$$

ここで、各記号の意味は下記の通りである。

g: 通分処理前の共通因数　　G: 約分共通因数

H: 累計共通因数　　F: 非共通因数

4. 共通因数の算出方法

DRM 法の k 段の通分処理で纏める初期項数 n は n=2^k となる。ここで、

$\tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} - \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5} - \frac{1}{7x^7} + \frac{1}{9x^9} - \frac{1}{11x^{11}} + \cdots$ の例で共通因数の算出方法を示す。

このとき、共通因数は x の値に関係なく求められる。共通因数で約分するためには、式 1 の G(約分共通因数)が必要であるが、説明の都合上まず H(累計共通因数)の求め方を先に示す。n 項の累計共通因数(H)は分母に含まれる素数(べき乗を含む)の累積である。また、n 項の約分共通因数(G)は累計共通因数(H)の中で、前段までを除いたもので、べき数を 2 の剰余にすることで求められる。

(1) 累計共通因数(H)の求め方及び具体例

(a) n 以下の奇素数(べき乗を含む)を求め、n をその数で割った整数を求める。

段数		n 以下の奇素数 (n を割った整数)
2 段(n=4)	:	3(1)
3 段(n=8)	:	3(2), 5(1), 7(1)
4 段(n=16)	:	3(5), 3^2(1), 5(3), 7(2), 11(1), 13(1)

5 段(n=32)： 3(10), 3^2(3), 3^3(1), 5(6), 5^2(1), 7(4), 11(2), 13(2), 17(1), 19(1), 23(1), 29(1), 31(1)

6 段(n=64)： 3(21), 3^2(7), 3^3(2), 5(12), 5^2(2), 7(9), 7^2(1), 11(5), …

(b) 求めた値を総て乗算した値を共通因数(H)とする。

2 段(n=4) ： 3

3 段(n=8) ： 3^2・5・7

4 段(n=16)： 3^6・5^3・7^2・11・13

5 段(n=32)： 3^{14}・5^7・7^4・11^2・13^2・17・19・23・29・31

6 段(n=64)： 3^{30}・5^{14}・7^{10}・11^5・13^4・17^3・19^3・23^2・…

(2) 約分共通因数(G)の求め方及び具体例

G(約分共通因数)は H(累計共通因数)の該当段を前段の 2 乗で除したものとなる。そのため、H の求め方と異なるのは、項番(a)で 2 の剰余を使用することである。

(a) n 以下の奇素数(べき乗を含む)を求め、n をその数で割った整数の 2 の剰余を求める。

段数　　n 以下の奇素数 (n を割った整数の 2 の剰余)

2 段(n=4) ： 3(1)

3 段(n=8) ： 5(1), 7(1)

4 段(n=16)： 3(1), 3^2(1), 5(1), 11(1), 13(1)

5 段(n=32)： 3^2(1), 3^3(1), 5^2(1), 17(1), 19(1), 23(1), 29(1), 31(1)

6 段(n=64)： 3(1), 3^2(1), 7(1), 7^2(1), 11(1), 17(1), 19(1), 37(1), …

(c) 求めた値を総て乗算した値を共通因数(G)とする。

2 段(n=4) ： 3

3 段(n=8) ： 5・7

4 段(n=16)： 3^2・5・11・13

5 段(n=32)： 3^2・5・17・19・23・29・31

6 段(n=64)： 3^2・7^2・11・17・19・37・41・43・47・53・59・61

5. 共通因数約分の効果

$\tan^{-1}(1)$ を DRM 法で計算する例で示す。ここでは、共通因数約分を用いる DRM 法と、用いない DRM 法で最終段(1 項に通分完了)の桁数を比較する。共通因数約分を用いた分母の値は式 1 の $E \cdot F$ である。図 1 に共通因数約分による桁数縮小効果を示す。効果は共通因数約分で分母の桁数が縮小する比を示す。DRM 法の段数が 6 段(32 項)以上になると、縮小比が段数に比例して向上することが分かり、35 段(約 340 億項)では、計算桁数が 1/8 に縮減する。計算時間等の比較評価は、発表で示す。

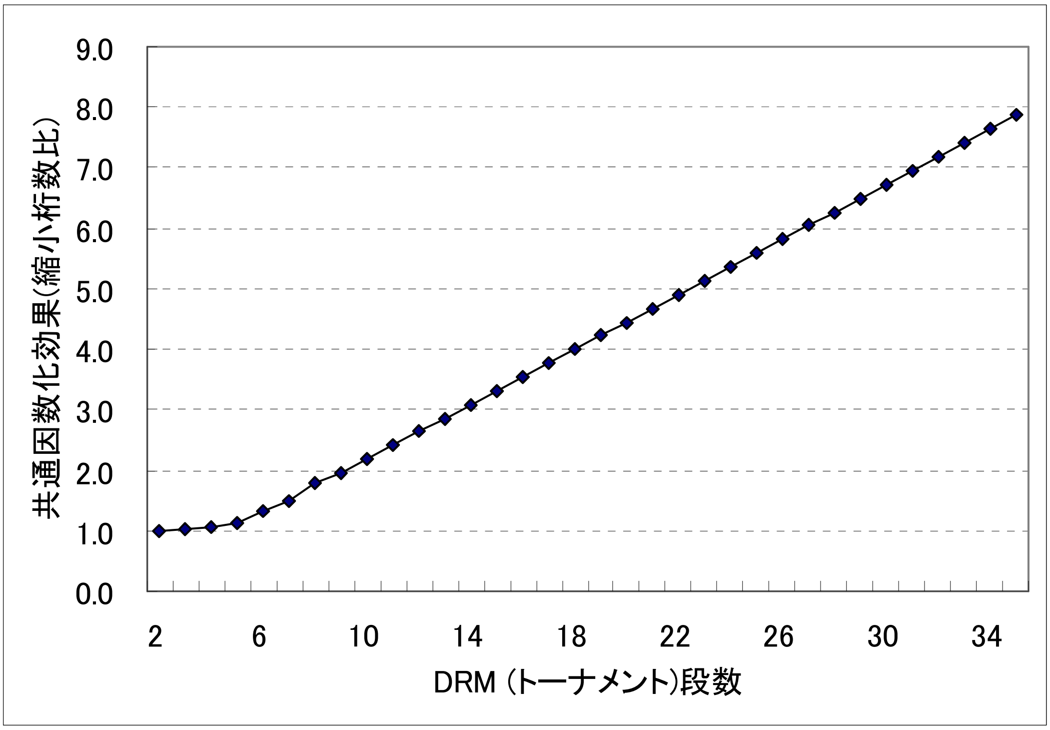

図 1. 共通因数約分による桁数縮小効果

6. おわりに

2002 年に 1.2 兆桁の π 計算世界記録は $\tan^{-1}$ 公式に DRM 法を適用して、大型スーパーコンピュータで行った。そのときには、共通因数約分をしない DRM 法を使用した。そこで、一番苦労した点はメモリの使用量を少なくし、ディスクへの入出力回数も可能なだけ少なくすることであった。今回の共通因数約分つき DRM 法を使用すれば、ディスクへの入出力回数を大幅に削減することが可能である。更に、2002 年の記録達成には、その後考案した分割乗算も組み込んでいない。この 2 点を追加すると、同じ桁数の計算がより小型のコンピュータで可能になると考えられる。

＜参考文献＞

1) Fabrice Bellard: Computation of 2700 billion decimal digits of Pi using a Desktop Computer, http://bellard.org/pi/pi2700e9/pipcrecord.pdf (2009).

2) 後 保範： 多数桁計算における高速アルゴリズムの研究，学位論文(早大理工研), 1-111, (2005).

3) 後 保範, 金田康正, 高橋大介： 級数に基づく多数桁計算の演算量削減を実現する分割有理数化法, 情報処理学会論文誌 , Vol.41 No.6, 1811-1819(2000).

4) 後 保範：多数桁分割乗算の高速計算法，情報処理学会論文誌，Vol.46 No.5, 1266-1273,(2005).