フィボナッチ数列であることの証明

2012年8月2日　後 保範

1，証明問題

f_nをフィボナッチ数列とする。このとき、下記が成立することを証明せよ。

$$F_n + F_{n+1} = \frac{1}{f_{2k+1}}\left(F_{n+k+1} + F_{n-k}\right)$$

ただし、$F_n = f_n^2$でn,kは$0<k<n$を満たす任意の自然数

2．フィボナッチ数列の証明に利用する式

下記の関係式を証明なしに利用する。証明はweb上の「フィボナッチ数を極める」(http://www004.upp.so-net.ne.jp/s_honma/fibonacci/fibonacci.htm)を参照。

(1) $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$

(2) $f_{n+k} = f_{k+1} f_n + f_k f_{n-1}$

(3) $f_{n+1} = f_{n+1}^2 + f_n^2$

(4) $f_{2n}^2 + 1 = f_{2n-1} f_{2n+1}$

3．証明（括弧内は利用式番号）

$$F_{n+k+1} + F_{n-k} = f_{n+k+1}^2 + f_{n-k}^2 = \left(f_{2k+1} f_{n-k+1} + f_{2k} f_{n-k}\right)^2 + f_{n-k}^2 \qquad \text{--- (2)}$$

$$= f_{2k+1}^2 f_{n-k+1}^2 + 2 f_{2k+1} f_{2k} f_{n-k+1} f_{n-k} + \left(f_{2k}^2 + 1\right) f_{n-k}^2$$

$$= f_{2k+1}\left(f_{2k+1} f_{n-k+1}^2 + 2 f_{2k} f_{n-k+1} f_{n-k} + f_{2k-1} f_{n-k}^2\right) \qquad \text{--- (4)}$$

$$F_n + F_{n+1} = f_n^2 + f_{n+1}^2 = \left(f_k f_{n+1-k} + f_{k-1} f_{n-k}\right)^2 + \left(f_{k+1} f_{n+1-k} + f_k f_{n-k}\right)^2 \qquad \text{--- (2)}$$

$$= \left(f_{k+1}^2 + f_k^2\right) f_{n-k+1}^2 + 2\left(f_{k+1} f_k + f_k f_{k-1}\right) f_{n-k+1} f_{n-k} + \left(f_k^2 + f_{k-1}^2\right) f_{n-k}^2$$

$$= f_{2k+1} f_{n-k+1}^2 + 2 f_{2k} f_{n-k+1} f_{n-k} + f_{2k+1} f_{n-k}^2 \qquad \text{--- (2),(3)}$$

したがって、$F_n + F_{n+1} = \dfrac{1}{f_{2k+1}}\left(F_{n+k+1} + F_{n-k}\right)$が成立する。